Logique & Analyse **131-132** (1990), 259-272

LOGIQUES CONSTRUITES SUIVANT LES METHODES DE DA COSTA I, [LOGIQUES PARACONSISTANTES, PARACOMPLETES, NON-ALETHIQUES CONSTRUITES SUIVANT LA PREMIERE METHODE DE DA COSTA]

JEAN-YVES BÉZIAU(*)

1. *Présentation*

N. C. A. da Costa a élaboré à la fin des années cinquante la logique paraconsistante C1 (voir [5][6][7][8][9] [13]). Nous avons récemment donné une nouvelle présentation de cette logique mettant en avant la méthode générale employée dans cette construction (voir [2]).

Le but du présent article est de montrer comment en utilisant systématiquement cette méthode l'on peut construire toute une série de logiques paraconsistantes, paracomplètes et non-alèthiques.

Nous présentons également trois innovations qui sont des perfectionnements de cette méthode.

La première consiste à renforcer les logiques obtenues par cette méthode en remplaçant la loi: 'la connection de formules obéissant au principe de contradiction (resp au principe du tiers exclu, aux deux, à l'un des deux) est une formule obéissant elle-même à ce principe' par la loi 'la connection de formules *dont l'une au moins* obéit au principe de contradiction (resp ...) est une formule obéissant elle-même à ce principe'.

La deuxième consiste à introduire des négations fortes sans l'utilisation de la boule, en utilisant un connecteur adéquat. Nous résolvons ainsi une question ouverte depuis la création de C1 (cf [13]).

La troisième réside dans l'utilisation de sémantiques multivalentes non vérifonctionnelles (il s'agit d'une nouveauté étant donné que les sémantiques à plus de deux valeurs étudiées jusqu'à présent étaient toujours vérifonctionnelles) afin que la valeur de vérité d'une formule ne dépende que de ses sous-formules.

(*) Titulaire d'une bourse Lavoisier du ministère des affaires étrangères du gouvernement francais.

Pour terminer nous élaborons des notions de dualité et d'autodualité afin d'établir un rapport de symétrie entre les logiques paraconsistantes et les logiques paracomplètes et de souligner la nature symétrique des logiques non-alèthiques. Ces notions de dualités servent également à classer tous ces systèmes et permettent d'y voir plus clair et de se retrouver plus facilement parmi cet enchevêtrement de logiques.
Nous utilisons certains résultats généraux de la théorie de la valuation (voir [10][11][14]) et de la logique abstraite (voir [3]), cet article ayant l'aspect supplémentaire d'illustrer et de servir d'application à ces théories générales qui sont le noyau sophistiqué des méthodes mises en jeu.

2. *Systèmes paraconsistants, paracomplets, non-alèthiques*

21. *Systèmes connectifs en* $\wedge$, $\vee$, $\neg$

Dans cette section on considère σ le fragment du calcul des séquents classique contenant outre l'axiome d'identité ($F \vdash F$ pour tout formule F, dénoté par id) et les règles structurelles (dénotées par cut, wg, wd, cong, cond, exg, exd) comme règles logiques uniquement les règles de la conjonction ($\wedge$d, $\wedge$g) et de la disjonction ($\vee$d, $\vee$g), tous les systèmes étudiés sont des systèmes obtenus à partir de σ en rajoutant certaines règles concernant un connecteur noté $\neg$ et appelé négation.

Nous appellerons principe du tiers exlu (resp principe de contradiction) la règle usuelle d'introduction dans le conséquent (resp antécédent) de la négation (ces règles seront dénotées par $\neg$d et $\neg$g) identifiant ainsi ces principes avec ces formalisations particulières.

Nous dirons également qu'une formule A obéit au principe du tiers exclu (resp principe de contradiction) lorsque l'on a $\vdash A, \neg A$ (resp $A, \neg A \vdash$).

211. *Systèmes paraconsistants et paracomplets*

2111. *Systèmes de type i*

Le système paraconsistant ci (resp le système paracomplet ki) est obtenu à partir de σ en rajoutant le principe du tiers exclu (resp le principe de contradiction) ainsi que la règle suivante :

$\Gamma \vdash A \wedge \neg A, \Delta \Rightarrow \Gamma, \neg(A \wedge \neg A) \vdash \Delta$ [resp $\Gamma, A \vee \neg A \vdash \Delta$
$\Rightarrow \Gamma \vdash \neg(A \vee \neg A), \Delta$]

qui peut être considérée comme signifiant *le principe de contradiction obéit au principe de contradiction (resp le principe du tiers exclu obéit au principe du tiers exclu).*

Dans ces systèmes on peut définir des négations fortes, il en résulte que l'on peut facilement y traduire la logique classique.

2112. *Systèmes + et x*

On peut renforcer naturellement les systèmes i à l'aide des deux lois suivantes:

a) la loi multiplicative x

cette loi a deux formes:

la loi multiplicative de contradiction (xc):

$\Gamma \vdash k[A_1, \ldots, A_p], \Delta$ et $\Gamma_i, A_i, \neg A_i \vdash \Delta_i$ (pour tout i, $1 \leq i \leq p$) $\Rightarrow$
$\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p, \neg k[A_1, \ldots, A_p] \vdash \Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_p$
[$p = 1$ et $k = \neg$, ou $p = 2$ et $k = \wedge$ ou $k = \vee$]

la loi multiplicative du tiers exlu (xt):

$\Gamma, k[A_1, \ldots, A_p] \vdash \Delta$ et $\Gamma_i \vdash A_i, \neg A_i, \Delta_i$ (pour tout i, $1 \leq i \leq p$) $\Rightarrow$
$\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p \vdash \neg k[A_1, \ldots, A_p], \Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_p$

Cette loi peut être interprétée de la façon suivante: *une formule qui est la connexion de formules obéissant au principe de contradiction (resp tiers exclu) obéit elle-même au principe de contradiction (resp tiers exclu)*

b) la loi additive +

cette loi a aussi deux formes:

loi additive de contradiction (+c)

$$\Gamma \vdash k[A_1, \ldots, A_p], \Delta \text{ et } \Gamma_i, A_i, \neg A_i \vdash \Delta_i \text{ (pour un i, } 1 \leq i \leq p) \Rightarrow$$
$$\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p, \neg k[A_1, \ldots, A_p] \vdash \Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_p$$

loi additive du tiers exclu (+t)

$$\Gamma, k[A_1, \ldots, A_p] \vdash \Delta \text{ et } \Gamma_i \vdash A_i, \neg A_i, \Delta_i \text{ (pour un i, } 1 \leq i \leq p) \Rightarrow$$
$$\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p \vdash \neg k[A_1, \ldots, A_p], \Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_p$$

et son interprétation est la suivante:

une formule qui est la connexion de formules dont l'une au moins obéit au principe de contradiction (resp tiers exclu) obéit elle-même au principe de contradiction (resp tiers exclu).

Nous appelons cx (resp kx) le système ci (resp ki) auquel on a ajouté la loi multiplicative de contradiction (resp du tiers exclu). De même nous avons les systèmes c+ et k+.

Le tableau suivant exprime quelques résultats significatifs concernant ces systèmes et leurs rapports mutuels. Dans ce tableau les schémas qui sont valables dans les systèmes x le sont dans les systèmes + (l'inverse est faux) et ceux qui sont valables dans les sytèmes c ne le sont pas dans les systèmes k et réciproquement.

cx x $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$ $\neg(\neg A \wedge \neg B) \vdash A \vee B$ $\neg(A \wedge \neg B) \vdash \neg A \vee B$ $\neg(\neg A \wedge B) \vdash A \vee \neg B$ c	+ c+ $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$ $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A \wedge B$ $\neg(A \vee \neg B) \vdash \neg A \wedge B$ $\neg(\neg A \vee B) \vdash A \wedge \neg B$ c
k $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$ $A \wedge B \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$ $\neg A \wedge B \vdash \neg(A \vee \neg B)$ $A \wedge \neg B \vdash \neg(\neg A \vee B)$ kx x	k $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$ $A \vee B \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)$ $\neg A \vee B \vdash \neg(A \wedge \neg B)$ $A \vee \neg B \vdash \neg(\neg A \wedge B)$ + k+

212. *Systèmes non-alèthiques*

2121. *Systèmes de type i*

On peut envisager deux genres de systèmes de type i. Premier genre: on ajoute à σ, les lois $\neg$td et $\neg$cg (système cki), second genre: on ajoute en plus les lois $\neg$tg et $\neg$cd (système ckii). Dans ckii on peut définir une négation forte mais pas dans cki.

2122. *Systèmes + et x*

On a les systèmes suivants: ckix (on ajoute à cki les lois multiplicatives de contradiction *et* du tiers exclu), cki+ (on ajoute les lois additives), de même on a les systèmes ckiix et ckii+.

On considère les lois multiplicatives et additives suivantes plus faibles:

loi multiplicative xx:

la loi multiplicative faible xxc de contradiction:

$\Gamma \vdash k[A_1, \ldots, A_p], \Delta$ et $\Gamma_i, A_i, \neg A_i \vdash \Delta_i$ (pour tout i, $1 \leq i \leq p$) et
$\Gamma_i \vdash A_i, \neg A_i, \Delta_i$ (pour tout i, $1 \leq i \leq p$) $\Rightarrow$
$\Gamma, \Gamma_i, \ldots, \Gamma_p, \neg k[A_1, \ldots, A_p] \vdash \Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_p$

la loi multiplicative faible xxt du tiers-exlu:

$\Gamma, k[A_1, \ldots, A_p] \vdash \Delta$ et $\Gamma_i \vdash A_i, \neg A_i, \Delta_i$ (pour tout i, $1 \leq i \leq p$) et
$\Gamma_i, A_i, \neg A_i \vdash \Delta_i$ (pour tout i, $1 \leq i \leq p$) $\Rightarrow$
$\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p \vdash \neg k[A_1, \ldots, A_p], \Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_p$

loi additive ++

loi additive faible ++c de contradiction

$\Gamma \vdash k[A_1, \ldots, A_p], \Delta$ et $\Gamma, A_i, \neg A_i \vdash \Delta_i$ (pour un i, $1 \leq i \leq p$) et
$\Gamma_i \vdash A_i, \neg A_i, \Delta_i$ (pour un i, $1 \leq i \leq p$) $\Rightarrow$
$\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p, \neg k[A_1, \ldots, A_p] \vdash \Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_p$

loi additive faible ++t du tiers exclu

Γ, $k[A_1, \ldots, A_p] \vdash \Delta$ et $\Gamma_i \vdash A_i, \neg A_i, \Delta_i$ (pour un i, $1 \leq i \leq p$) et
$\Gamma_i, A_i, \neg A_i \vdash \Delta_i$ (pour un i, $1 \leq i \leq p$) $\Rightarrow$
$\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p \vdash \neg k[A_1, \ldots, A_p], \Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_p$

En utilisant ces lois on obtient les systèmes ckixx, cki++, ckiixx et ckii++.

On illustre par le tableau suivant les rapports entre les différents systèmes non-alèthiques construits sur la base du système cki (les flèches relient les systèmes à des systèmes srtictement plus forts, cette relation est bien sûr transitive et on n'a donc pas représenté toutes les flèches):

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{cki} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{ckixx} \arrow[rr] \arrow[d] & & \text{cki++} \arrow[d] \\
\text{ckix} \arrow[rr] & & \text{cki+}
\end{tikzcd}
$$

Un tableau similaire vaudrait pour les systèmes basés sur ckii, la liaison entre les tableaux se ferait en envoyant cinq flèches respectant les diagrammes du premier (celui représenté ci-dessus) vers le second.

Pour tous les systèmes présentés on obtient l'élimination des coupures et la décidabilité en adaptant facilement les méthodes employées dans [1] et [2].

22. *Implication et soustraction*

On considère l'implication et la soustraction qui sont données par les règles suivantes:

pd($\rightarrow$d): $\Gamma, A \vdash B, \Delta \Rightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta$
pg($\rightarrow$g): $\Gamma \vdash A, \Delta$ et $\Gamma', B \vdash \Delta' \Rightarrow \Gamma, \Gamma', A \rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'$
sd(-d): $\Gamma \vdash A, \Delta$ et $\Gamma', B \vdash \Delta' \Rightarrow \Gamma, \Gamma' \vdash A\text{-}B, \Delta, \Delta'$
sg(-g): $\Gamma, A \vdash B, \Delta \Rightarrow \Gamma, A\text{-}B \vdash \Delta$

On appelle cs le système paraconsistant obtenu à partir de σ en ajoutant $\neg$d, sd et sg, kp est le système paracomplet obtenu en ajoutant cette fois-ci $\neg$g, pd et pg.

Dans cs on peut définir une négation forte avec $\neg$A-A et dans kp avec A$\rightarrow\neg$A, par conséquent la logique classique y est traductible.
On a également les systèmes cs+, csx, kp+ et kpx (obtenus respectivement en augmentant les systèmes précédents des règles +c, xc, +t, xt).
On envisage le système non-alèthique cksp, obtenu à partir de ck avec pg, pd, sg, sd, ainsi que cksp+, ckspx.

Remarque 1: Logique paracomplète peircéenne

La logique intuitionniste est une logique paracomplète non-peircéenne [la loi de Peirce $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ n'y est pas valable], au contraire tous les systèmes paracomplets et non-alèthiques présentés sont des logiques peircéennes si on leur ajoute pd et pg dans le cas où elles n'y figurent déjà.

Remarque 2: Double négation

Dans les systèmes paraconsistants on a $\neg\neg A \vdash A$ (l'inverse étant faux), dans les systèmes paracomplets $A \vdash \neg\neg A$ (l'inverse étant faux) et dans les systèmes non-alèthiques ni l'un ni l'autre.

Remarque 3: Propriétés de la loi + et des systèmes corrélatifs

Avec la loi + pour qu'une formule obéisse au principe de contradiction (resp du tiers exclu, aux deux) il suffit en fait qu'une de ses sous-formules y obéissent: si H est une sous formule de F:

$$H, \neg H \vdash \Rightarrow F, \neg F \vdash \qquad \vdash H, \neg H \Rightarrow \vdash F, \neg F.$$

Il en résulte que l'on peut formuler la loi + en exigeant simplement que la formule de conclusion obéisse au principe voulu à condition que l'une de ses sous-formules y obéisse. Comme corollaire de ce résultat les règles dérivées suivantes sont valides lorsque A est une sous-formule de B dans:

c+:	$\neg A \vdash B \Rightarrow \neg B \vdash A$	$A \vdash B \Rightarrow \neg B \vdash \neg A$
	$B, \neg B \vdash A$	$B, \neg B \vdash \neg A$
	$\neg A \vdash B \;\&\; \neg A \vdash \neg B \Rightarrow \vdash A$	$A \vdash B \;\&\; A \vdash \neg B \Rightarrow \vdash \neg A$
k+:	$B \vdash \neg A \Rightarrow A \vdash \neg B$	$B \vdash A \Rightarrow \neg A \vdash \neg B$
	$A \vdash B \vee \neg B$	$\neg A \vdash B \vee \neg B$

23. *Autres systèmes possibles*

231 *Autres logiques obtenues similairement*

Nous avons présenté à titre d'exemples les constructions les plus naturelles, beaucoup d'autres sont possibles en combinant d'autres manières les mêmes lois et on peut y trouver des motivations mais nous ne prétendons pas discuter de cela ici.

On peut également rajouter des connecteurs et notamment des connecteurs ayant un comportement classique.

On remarquera que si dans un sytème possédant une négation forte $\neg$ on définit $A \vee B$ à partir de la conjonction et de cette négation comme étant $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ alors cette disjonction n'est pas nécessairement la même que celle définie directement dans le système par les règles usuelles, ainsi dans le système ki présenté plus haut qui possède une négation forte, $A \vee B$ n'obéit pas généralement au principe du tiers exclu alors que $A \vee B$ obtenu par définition y obéit [ie $\vdash_{ki}(\neg^*(\neg^*A \wedge \neg^*B) \vee \neg^*\neg^*(\neg^*A \wedge \neg^*B))$ où $\neg^*$ est la négation forte]. Cela illustre le fait que la signification d'un connecteur dans un système dépend non seulement des règles qui le définissent mais aussi des autres règles.

On peut également construire sur la base de chacun des systèmes présentés des hiérarchies du type de celle formée à partir de C1.

232. *Logiques dérogeant le principe d'identité, logiques paranormales*

Si dans les systèmes évoqués on remplace l'axiome d'identité dans sa forme générale (valable pour toute formule) par sa forme restreinte (valable seulement pour les atomes) alors on obtient des systèmes plus faibles dans lesquels l'axiome d'identité n'est pas valable dans sa forme générale et on obtient ainsi tout une série de logiques qui dérogent le principe d'identité (au sujet de telles logiques voir [15]) en plus de déroger les deux autres principes traditionnellement considérés comme fondamentaux. Si on appelle *paranormale* une logique qui ne vérifie ni l'axiome d'identité, ni les lois de contradiction et du tiers exclu, nous avons ici *des exemples* significatifs de telles logiques paranormales.

233. *Logiques encore plus spéciales*

On peut appliquer des restrictions aux règles de σ en exigeant que ces règles ne soient valides qu'à la condition supplémentaire que la (ou les) formule(s) principale(s) des prémisses obéisse(ent) ou au principe de contradiction ou au principe du tiers exclu ou aux deux. La conjonction peut alors ne pas être commutative, de même pour la disjonction, etc... En ce qui concerne les règles structurelles, en opérant ces modifications, on peut obtenir des logiques non-monotones, des logiques ou les lois de contractions et de coupures ne sont pas valides en générales, etc...

3. *Sémantique*

31. *Sémantiques bivalentes*

En utilisant la théorie de la valuation il est facile d'obtenir des sémantiques bivalentes adéquates pour tous les systèmes évoqués.

La sémantique de chaque système est constituée par la classe V des fonctions (appelées valuations) de l'ensemble des formules dans $\{0, 1\}$ obéissant à un groupe de conditions bien choisies de la liste suivante.

$\wedge$: $v(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 1$ et $v(B) = 1$

$\vee$: $v(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 1$ ou $v(B) = 1$

$\rightarrow$: $v(A \rightarrow B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 0$ ou $v(B) = 1$

- : $v(A\text{-}B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 1$ ou $v(B) = 0$

$\neg$g: $v(A) = 1 \Rightarrow v(\neg A) = 0$

$\neg$d: $v(A) = 0 \Rightarrow v(\neg A) = 1$

$\neg$cg: $v[(A \wedge \neg A)] = 1 \Rightarrow v[\neg(A \wedge \neg A)] = 0$

$\neg$cd: $v[(A \wedge \neg A)] = 0 \Rightarrow v[\neg(A \wedge \neg A)] = 1$

$\neg$td: $v[(A \vee \neg A)] = 0 \Rightarrow v[\neg(A \vee \neg A)] = 1$

$\neg$tg: $v[(A \vee \neg A)] = 1 \Rightarrow v[\neg(A \vee \neg A)] = 0$

xx: $v(A_i) \neq (\neg A_i)$
pour tout $i(1 \leq i \leq p) \Rightarrow v(k[A_1, \ldots, A_p]) \neq v(\neg k[A_1, \ldots, A_p])$

++: $v(A_i) \neq (\neg A_i)$
pour un $i(1 \leq i \leq p) \Rightarrow v(k[A_1, \ldots, A_p]) \neq v(\neg k[A_1, \ldots, A_p])$

x: $v(A_i) = 0$ ou $v(\neg A_i) = 0$
pour tout $i(1 \leq i \leq p)$ et $v(A_i) = 1$ ou $v(\neg A_i) = 1$ pour tout $i(1 \leq i \leq p) \Rightarrow v(k[A_1, \ldots, A_p]) \neq v(\neg k[A_1, \ldots, A_p])$

$+$: $v(A_i) = 0$ ou $v(\neg A_i) = 0$
pour un $i(1 \leq i \leq p)$ et $v(A_i) = 1$ ou $v(\neg A_i) = 1$ pour un $i(1 \leq i \leq p) \Rightarrow v(k[A_1, \ldots, A_p]) \neq v(\neg k[A_1, \ldots, A_p])$

Par exemple la sémantique correspondant au système cs+ est celle obéissant aux conditions: $\wedge$, $\vee$, -, $\neg$cg, $\neg$d, +.

On construit facilement sur le même modèle que dans [2], [9] et [16] des tables de vérité relatives à ces sémantiques. Il en résulte dans tous les cas des théorèmes de décidabilité sémantique.

32. *Sémantiques multivalentes*

Par sémantique à n-valeurs ($n > 1$) nous entendons une classe de fonctions de l'ensemble des formules de la logique dans $\{0, \ldots, n\}$, une sémantique multivalente en ce sens n'est pas nécessairement vérifonctionnelle, aucune des sémantiques présentées dans ce qui suit ne l'est. On a déjà fait usage des sémantiques bivalentes non vérifonctionnelles, à notre connaissance ce n'est pas le cas des sémantiques multivalentes (à plus de 2 valeurs) non vérifonctionnelles, nous innovons donc et montrons quelle peut être leur utilité.

Méthode générale pour obtenir une sémantique multivalente.

Soit une logique paraconsitante (resp paracomplète, non-alèthique) quelconque correspondant à un système évoqué dans la section 2, V le sous-ensemble des applications de l'ensemble des formules dans $\{0, 1\}$ obtenu par la méthode de la section 31, on considère l'application h suivante de V dans l'ensemble des applications de l'ensemble des formules dans $\{0{,}5;\ 1;\ 1{,}5\}$ (resp $\{0;\ 0{,}5;\ 1\}$,$\{0;\ 0{,}5;\ 1;\ 1{,}5\}$)

$\supset$ $h[v](F) = 0{,}5$ ssi $v(F) = 0$ et $v(\neg F) = 0$
$h[v](F) = 0$ ssi $v(F) = 0$ et $v(\neg F) = 1$
$h[v](F) = 1$ ssi $v(F) = 1$ et $v(\neg F) = 0$
$h[v](F) = 1{,}5$ ssi $v(F) = 1$ et $v(\neg F) = 1$

La sémantique multivalente désirée est obtenue en considérant h[V] et en prenant comme valeurs désignées les valeurs supérieures ou égales à 1. On prouve facilement que les sémantiques obtenues sont adéquates en utilisant le théorème 3 de [3].

L'avantage principale de ces sémantiques mutlivalentes est que la valeur de vérité d'une formule ne dépend que de la valeur de vérité de ses sous-formules (comme dans le cas de la logique classique) alors qu'avec les sémantiques bivalentes elle dépend de la valeur de vérité de ses sous-formules et de certaines négations de ses sous-formules.

Dans [3] on a montré que toute sémantique pouvait se réduire à une sémantique bivalente. Cependant par cette réduction certaines propriétés intéressantes de la sémantique mutlivalente se perdent, c'est le cas souvent de la vérifonctionnalité. Nous voyons ici une propriété importante qui s'exprime grâce à la multivalence non vérifonctionnelle.

Une autre particularité intéressante est que dans les sémantiques multivalentes obtenues on a des conjonctions et des disjonctions non vérifonctionnelles.

On peut facilement adapter la méthode des tables de vérité à ce type de sémantique.

4. *Dualité*

41. *Dualité des systèmes*

On définit l'application # de l'ensemble des formules dans lui même de la façon suivante:

$$p^{\#} = p,\ (\neg A)^{\#} = A^{\#},\ (A \wedge B)^{\#} = A^{\#} \vee B^{\#},\ (A \vee B)^{\#} = A^{\#} \wedge B^{\#},$$
$$(A \rightarrow B)^{\#} = B^{\#}\text{-}A^{\#},\ (A\text{-}B)^{\#} = B^{\#} \rightarrow A^{\#}$$

Un système dans lequel $F \vdash G$ ssi $G^{\#} \vdash F^{\#}$ est dit autodual. La logique classique et les sytèmes non-alèthiques présentés plus haut sont autoduaux, il n'en est pas de même des systèmes paraconsistants et paracomplets évoqués.

Deux systèmes $\Sigma 1$ et $\Sigma 2$ sont dits duaux lorsque l'on a:

$$F \vdash_{\Sigma_1} G \text{ ssi } G^{\#} \vdash_{\Sigma_2} F^{\#}.$$

ci et ki, cs et kp, c+ et k+, cx et kx, cs+ et kp+, csx et kpx sont duaux.

Il y a un opérateur de dualité entre les preuves des systèmes (nous considérons les preuves sans coupure) sous-jacent à ces résultats.

Commençons par définir # pour les séquents:

$$(A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m)^{\#} = (B_1)^{\#}, \ldots, (B_m)^{\#} \vdash (A_1)^{\#}, \ldots, (A_n)^{\#}.$$

Puis pour les règles:

$id^{\#} = id$, $(?d)^{\#} = ?g$, $(?g)^{\#} = ?d$ pour $? \in \{w, con, ex, \neg, \neg t, \neg c\}$, $(\wedge d)^{\#} = \vee g$, $(\vee d)^{\#} = \wedge g$, $(\vee d)^{\#} = \wedge g$, $(\wedge d)^{\#} = \vee g$, $(\rightarrow d)^{\#} = -g$, $(-d)^{\#} = \rightarrow g$, $(-d)^{\#} = \rightarrow g$, $(\rightarrow d)^{\#} = -g$, $(?c)^{\#} = ?t$, $(?t)^{\#} = ?c$ pour $? \in \{+, ++, x, xx\}$.

On peut alors définir # pour les preuves.

Nous dénoterons une preuve π d'un système de la façon suivante:

$$\pi[s_1(s_{1i}, \ldots, s_{1j} /R_1), \ldots, s_n(s_{ni}, \ldots, s_{nj} /R_n)] \text{ avec } k_i, k_j \leq k \ (1 \leq k \leq n).$$

A l'intérieur des parenthèses suivant chaque séquent s_k sont indiqués les séquents à partir desquels il a été obtenu et au moyen de quelle règle (R_k). Dans le cas de l'identité le seul séquent figurant entre parenthèse est le séquent lui-même.

On a alors:

$$(\pi[s_1(s_{1i}, \ldots, s_{1j} /R_1), \ldots, s_n(s_{ni}, \ldots, s_{nj} /R_n)])^{\#} =$$
$$[s_1^{\#}(s_{1i}^{\#}, \ldots, s_{1j}^{\#} /R_1^{\#}), \ldots, s_n^{\#}(s_{ni}^{\#}, \ldots, s_{nj}^{\#} /R_n^{\#})].$$

Un système est dit autodual (du point de vue des preuves) lorsque π est une preuve du système ssi $\pi^{\#}$ l'est également. Un système $\Sigma 1$ est dit dual (du point de vue des preuves) d'un système $\Sigma 2$ lorsque π est une preuve de $\Sigma 1$ ssi $\pi^{\#}$ est une preuve de $\Sigma 2$. Les systèmes autoduaux au sens précédent du terme le sont également en ce sens là et vice versa, de même pour les systèmes duaux. Comme le séquent résultant de $\pi^{\#}$ est le dual du séquent résultant de π, la dualité au premier sens résulte directement de la dualité des preuves.

42. *Dualité sémantique*

On définit l'opérateur # pour les valuations comme suit:

$v^{\#}(F^{\#}) = 1$ ssi $v(F) = 0$.

Une sémantique est dite autoduale lorsque l'on a:

$v \in V$ ssi $v^{\#} \in V$.

Une sémantique $\mathfrak{S}1$ est dite duale d'une sémantique $\mathfrak{S}2$ quand:

$v \in V1$ ssi $v^{\#} \in V2$.

Les systèmes autoduaux signalés dans la sous-section précédente ont des sémantiques autoduales et vice versa; de même pour la dualité.

Remarques sur les rapports avec des systèmes déjà connus

On aura reconnu dans cette présentation systématique certains systèmes déjà étudiés isolément (ou des formes avoisinantes sans règle pour l'implication). Ainsi ci correspond au système Ci de [2], cx au fameux système C1, ckiix au système ρ de [1], ckiixx au système π de [1] et [16]. Le système P1 présenté dans [4] et [12] correspondrait à un système obtenu à partir de σ en ajoutant $\neg$g, $\neg$tg, tx, et pd/pg (ce n'est donc pas le dual de C1).

Universités de Paris 1 (Panthéon-Sorbonne) et Paris 7 (Jussieu)

Dédié au prof. N.C.A. da Costa.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Béziau, J-Y., 'Calcul des séquents pour logique non-alèthique' *Logique et Analyse*, n° 125-126 (1989), pp 143-155.
[2] Béziau, J-Y., 'Les logiques propositionnelles paraconsistantes Ci et C1', à paraître.
[3] Béziau, J-Y., 'Recheches sur la logique abstraite : les logiques normales', à paraître.

[4] Buchsbaum, A. et T. Pequeno, 'O método dos tableaux generalizado' *Cadernos do Departamento de Filosofia da PUC-Rio*, n°3 (1990), pp 81-96.

[5] da Costa, N. C. A., 'Sistemas Formais Inconsistentes', Thèse, Universidade Federal do Paraná, 1963.

[6] da Costa, N. C. A., 'Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants' *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, T257 (1963), pp 3790-3793.

[7] da Costa, N. C. A., 'On the theory of inconsistent formal systems' *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol XV, n° 4 (1974), pp 497-510.

[8] da Costa, N. C. A. et E. H. Alves, 'Une sémantique pour le calcul C1' *Comptes Rendus de l'Acadèmie des Sciences de Paris*, T238A (1976), pp 729-731.

[9] da Costa, N. C. A. et E. H. Alves, 'A semantical analysis of the calculi Cn', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol XVIII, n° 4 (1977), pp 621-630.

[10] da Costa, N. C. A. et J-Y. Béziau, 'Théorie de la Valuation', à paraître.

[11] da Costa, N. C. A. et J-Y. Béziau, 'Remarques sur la Théorie de la Valuation' in *Proceedings of the Ninth Latin American Symposium on Mathematical Logic*, M. Abad ed, Universidad del Sur, Bahia Blanca, à paraître.

[12] da Costa, N. C. A. et D. Marconi, 'A note on paracomplete logic', *Atti Acad. Lincei Rend. . Cl. Sci. Fis. Mat. Natur*, série 8, vol80, fascicule 7-12 (1986), pp 504-509.

[13] D'Ottaviano, I. M. L., 'On the development of paraconsistent logic and da Costa's work', *Journal of Non-Classical Logic*, vol 7, n° 1-2 (1990), pp 9-72.

[14] Grana, N., 'Sulla teoria delle valutazioni di N. C. A. da Costa' Liguori Editore, Napoli 1990, 75p.

[15] Krause, D. et Béziau, J-Y., 'How can the logical law of idendity be derogated ?', à paraître.

[16] Loparic, A. et N. C. A. da Costa, 'Paraconsistency, paracompleteness and valuations' *Logique et Analyse*, n° 106 (1984), pp 119-131.