

## CALCUL DES SEQUENTS POUR LOGIQUE NON-ALETHIQUE

Jean-Yves BÉZIAU

### 1. *Introduction*

Le principe de contradiction et le principe du tiers-exclu sont longtemps apparus comme les deux piliers de la logique. S'il n'est plus question aujourd'hui de montrer qu'une logique peut bien subsister sans l'un de ces principes, de même qu'un borgne possède encore la vue, on pourrait penser qu'une logique dépourvue à la fois de ces deux principes serait totalement inopérante. Cependant A.Loparic et N.C.A. da Costa ont présenté une telle logique [4], dite non-aléthique, qui, en un certain sens, est plus forte que la logique classique.

De façon plus générale et plus technique la notion de logique non-aléthique doit être entendue comme suit. Si dans une théorie  $T$  il y a deux théorèmes contradictoires tous deux vrais, cette théorie est dite paraconsistante, s'il y a deux formules contradictoires toutes deux fausses, elle est dite paracomplète ; une théorie non-aléthique est une théorie à la fois paraconsistante et paracomplète. Une logique non-aléthique est une logique pouvant servir de base au développement de théories non-aléthiques.

A.Loparic et N.C.A. da Costa ont élaboré suivant une méthode axiomatique une logique propositionnelle non-aléthique  $\pi$ , ils ont montré que l'on pouvait munir cette logique d'une sémantique bivalente adéquate et que cette logique était décidable d'après une méthode généralisée des tables de vérité (ces résultats sont exposés dans [4]).

Nous présentons ici un calcul des séquents  $S_{\pi}$  pour cette logique. Après avoir démontré son équivalence avec la présentation axiomatique nous montrons que ce calcul admet l'élimination des coupures (il en résulte un théorème de décidabilité) et que l'on peut y définir une négation possédant un comportement séquentiellement classique. Ensuite nous présentons une hiérarchie infinie de calcul des séquents non-aléthiques construits sur ce modèle et possédant ces deux propriétés fondamentales. Enfin nous montrons comment l'on peut élaborer en modifiant  $S_{\pi}$  une logique non-aléthique plus forte (et une hiérarchie infinie correspondante) pourvue elle aussi de ces propriétés.

Du point de vue du calcul des séquents, ces systèmes non-aléthiques ont l'avantage de jouir de propriétés de symétrie remarquables contrairement au calcul des séquents correspondant à la logique paraconsistante C de N.C.A. da Costa (Voir [2] pour une présentation générale de cette logique, [1] et [5] pour une approche en termes de calcul des séquents) et à sa duale paracomplète.

## 2. Présentation des systèmes $\pi$ et $S_*$

Loparic et da Costa ont utilisé le système axiomatique suivant pour  $\pi$ :

- 1)  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- 2)  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- 3)  $A, A \rightarrow B / B$
- 4)  $(A \wedge B) \rightarrow A$
- 5)  $(A \wedge B) \rightarrow B$
- 6)  $(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)))$
- 7)  $(A \rightarrow (A \vee B))$
- 8)  $(B \rightarrow (A \vee B))$
- 9)  $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
- 10)  $A^\circ \vee (A \wedge A) \vee \neg(A \vee \neg A)$
- 11)  $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$
- 12)  $\neg(A \wedge \neg A) \rightarrow ((A \wedge \neg A) \rightarrow B)$
- 13)  $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow ((A \vee \neg A) \rightarrow B)$
- 14)  $(A_1^\circ \wedge \dots \wedge A_p^\circ) \rightarrow (k[A_1, \dots, A_p])^\circ$

$A^\circ$  est une abréviation pour  $\neg(A \wedge \neg A) \wedge (A \vee \neg A)$ .

Dans 14)  $p \in \{1\}$  et  $k \in \{\neg\}$  ou  $p \in \{2\}$  et  $k \in \{\vee, \rightarrow, \wedge\}$ ,  $k[A_1, \dots, A_p] \neq B \vee \neg B$  et  $k[A_1, \dots, A_p] \neq B \wedge \neg B$ . Nous utiliserons toujours ces écritures dans ce sens.

$S_*$  est le système suivant:

Axiome  $A \vdash A$

Coupure 
$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} c$$

Affaiblissement	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \text{ ad}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{ ag}$
Conjonction	$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma' \vdash B, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta'} \wedge d$	$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge g$
Disjonction	$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee d$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash \Delta, \Delta'} \vee g$
Implication	$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow d$	$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \rightarrow g$
Négation	$\frac{\Gamma, A \vee \neg A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg(A \vee \neg A), \Delta} \neg td$	$\frac{\Gamma \vdash A \vee \neg A, \Delta}{\Gamma, \neg(A \vee \neg A) \vdash \Delta} \neg tg$
	$\frac{\Gamma, A \wedge \neg A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg(A \wedge \neg A), \Delta} \neg cd$	$\frac{\Gamma \vdash A \wedge \neg A, \Delta}{\Gamma, \neg(A \wedge \neg A) \vdash \Delta} \neg cg$
	$\frac{\Gamma, K \vdash \Delta \quad \Gamma_{1_i} \vdash A_i, \neg A_i, \Delta_{1_i} \quad \Gamma_{2_i}, A_i, \neg A_i \vdash \Delta_{2_i}}{\Gamma, \Gamma_{1_i}, \Gamma_{2_i} \vdash \neg K, \Delta, \Delta_{1_i}, \Delta_{2_i}} \neg kd$	
	$\frac{\Gamma \vdash K, \Delta \quad \Gamma_{1_i} \vdash A_i, \neg A_i, \Delta_{2_i} \quad \Gamma_{2_i}, A_i, \neg A_i \vdash \Delta_{2_i}}{\Gamma, \Gamma_{1_i}, \Gamma_{2_i}, \neg K \vdash \Delta, \Delta_{1_i}, \Delta_{2_i}} \neg kg$	

 $1 \leq i \leq p$ 
 $K = k[A_1, \dots, A_p]$ 

NB:  $\Gamma_i \vdash \Delta_i, 1 \leq i \leq p$  signifie:  $\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \dots \Gamma_p \vdash \Delta_p$   
 $\Gamma, \Gamma_i \vdash \Delta_i, 1 \leq i \leq p$  signifie:  $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_p \vdash \Delta_1, \dots, \Delta_p$

3. *Equivalence des systèmes*

$$\boxed{T \vdash_{\mathbf{x}} F \text{ ssi } T \vdash_{\mathbf{s}_{\mathbf{x}}} F}$$

a) si  $T \vdash_{\mathbf{x}} F$  alors  $T \vdash_{\mathbf{s}_{\mathbf{x}}} F$

10)

$$\frac{\frac{A \wedge \neg A \vdash A \wedge \neg A}{\vdash \neg(A \wedge \neg A), A \wedge \neg A} \neg cd \quad \frac{A \vee \neg A \vdash A \vee \neg A}{\vdash A \vee \neg A, \neg(A \vee \neg A)} \neg td}{\vdash \neg(A \wedge \neg A) \wedge (A \vee \neg A), A \wedge \neg A, \neg(A \vee \neg A)} \wedge d$$

$$\frac{\vdash \neg(A \wedge \neg A) \wedge (A \vee \neg A), A \wedge \neg A, \neg(A \vee \neg A)}{\vdash (\neg(A \wedge \neg A) \wedge (A \vee \neg A)) \vee ((A \wedge \neg A) \vee \neg(A \vee \neg A))} \vee d$$

11)

$$\frac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A \vdash A, \neg A} \text{ ad+ag}$$

$$\frac{\vdash A, \neg A \vdash A, \neg A}{\vdash A \wedge \neg A \vdash A, \neg A} \wedge g$$

$$\frac{\vdash A \wedge \neg A \vdash A, \neg A}{\vdash A \wedge \neg A \vdash A \vee \neg A} \vee d$$

$$\frac{\vdash A \wedge \neg A \vdash A \vee \neg A}{\vdash A \wedge \neg A, \neg(A \vee \neg A) \vdash} \neg tg$$

$$\frac{\vdash A \wedge \neg A, \neg(A \vee \neg A) \vdash}{\vdash \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A)} \neg cd$$

$$\frac{\vdash \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A)}{\vdash \neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg(A \wedge \neg A)} \rightarrow d$$

12)

$$\frac{\vdash A \wedge \neg A \vdash A \wedge \neg A}{\vdash A \wedge \neg A, \neg(A \wedge \neg A) \vdash} \neg cg$$

$$\frac{\vdash A \wedge \neg A, \neg(A \wedge \neg A) \vdash}{\vdash A \wedge \neg A, \neg(A \wedge \neg A) \vdash B} \text{ ad}$$

$$\frac{\vdash A \wedge \neg A, \neg(A \wedge \neg A) \vdash B}{\vdash \neg(A \wedge \neg A) \rightarrow ((A \wedge \neg A) \rightarrow B)} \rightarrow d$$

13)

$$\frac{\frac{\frac{A \vee \neg A \vdash A \vee \neg A}{\vdash A \vee \neg A, \neg(A \vee \neg A)} \neg tg}{\vdash A \vee \neg A, \neg(A \vee \neg A) \vdash B} ad}{\vdash \neg(A \vee \neg A) \rightarrow ((A \vee \neg A) \rightarrow B)} \rightarrow d$$

14)

$$\frac{\frac{\frac{A_i \vdash A_i \quad \neg A_i \vdash \neg A_i}{A_i, \neg A_i \vdash A_i \wedge \neg A_i} \wedge d}{\neg(A_i \wedge \neg A_i), A_i, \neg A_i \vdash} \neg cg}{\frac{A_i^\circ, A_i, \neg A_i \vdash}{(14.1)} ag + \wedge g}$$

$$\frac{\frac{\frac{A_i \vdash A_i \quad \neg A_i \vdash \neg A_i}{A_i \vee \neg A_i \vdash A_i, \neg A_i} \vee g}{A_i^\circ \vdash A_i, \neg A_i} ag + \vee g}{(14.2)}$$

$$\frac{\frac{\frac{(14.1) \quad (14.2) \quad K \vdash K}{A_{1^\circ}, \dots, A_{p^\circ}, K, \neg K \vdash} \neg kg}{\frac{A_{1^\circ}, \dots, A_{p^\circ}, K \wedge \neg K \vdash}{\vdash A_{1^\circ}, \dots, A_{p^\circ} \vdash \neg(K \wedge \neg K)} \neg cd} \wedge g}{\frac{\frac{(14.1) \quad (14.2) \quad K \vdash K}{A_{1^\circ}, \dots, A_{p^\circ} \vdash K, \neg K} \neg kd}{\frac{A_{1^\circ}, \dots, A_{p^\circ} \vdash K \vee \neg K} \vee d} \wedge d} \wedge g}{\frac{A_{1^\circ}, \dots, A_{p^\circ} \vdash \neg(K \wedge \neg K) \wedge (K \vee \neg K) : K^\circ}{\vdash (A_{1^\circ} \wedge \dots \wedge A_{p^\circ}) \rightarrow K^\circ} \rightarrow d} \wedge g$$

$1 \leq i \leq p$

$K = k[A_1, \dots, A_p]$

b) si  $T \vdash_s F$  alors  $T \vdash_\pi F$

Pour cette preuve on utilise un système de déduction naturelle de style M (cf [3]) dont l'équivalence avec le système axiomatique est évidente suivant les méthodes habituelles. On résoud le problème de la multiplicité des formules à droite du fait que la loi de Peirce  $[((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A]$  est démontrable dans  $\pi$  (cela résulte du théorème 4 de [4]). Dans cette preuve nous utilisons les propriétés usuelles du système M sous-jacent et signalons uniquement l'usage des règles du système correspondant aux axiomes typiques de  $\pi$ .

$$\begin{array}{l}
 \neg tg) \\
 \frac{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A) \quad \vdash A \vee \neg A}{\neg(A \vee \neg A) \vdash} \quad 13) \\
 \neg cg) \\
 \frac{\neg(A \wedge \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A) \quad \vdash A \wedge \neg A}{\neg(A \wedge \neg A) \vdash} \quad 12) \\
 \neg td) \\
 (10) \\
 \hline
 \vdash (A \vee \neg A) \vee (A \wedge \neg A) \vee \neg(A \vee \neg A) \qquad \qquad \qquad A \vee \neg A \vdash \\
 \hline
 \vdash (A \wedge \neg A) \vee \neg(A \vee \neg A) \\
 \hline
 \vdash (A \vee \neg A) \vee \neg(A \vee \neg A) \quad A \vee \neg A \vdash \\
 \hline
 \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
 \neg cd) \\
 (10) \\
 \hline
 \vdash \neg(A \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg A) \vee \neg(A \vee \neg A) \qquad \qquad \qquad (11) \\
 \hline
 \vdash \neg(A \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg A) \vee \neg(A \wedge \neg A) \\
 \hline
 \vdash \neg(A \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg A) \qquad \qquad \qquad A \wedge \neg A \vdash \\
 \hline
 \vdash \neg(A \wedge \neg A)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \neg kd) \\
 \frac{A_i, \neg A_i \vdash}{\vdash \neg(A_i \wedge \neg A_i)} \quad \frac{K \vee \neg K \vdash K \vee \neg K}{\neg(K \wedge \neg K), K \vee \neg K \vdash K \vee \neg K} \\
 \frac{\vdash A_i^\circ}{\vdash K^\circ} \quad 14) \quad \frac{\neg(K \wedge \neg K), K \vee \neg K \vdash K \vee \neg K}{K^\circ \vdash K \vee \neg K} \\
 \frac{\vdash K \vee \neg K}{\vdash \neg K} \quad K \vdash
 \end{array}$$

$K = k[A_1, \dots, A_p]$   
 $1 \leq i \leq p$

$\neg kg)$  cas symétrique.

4. *Elimination des coupures*

La preuve se fait de façon identique à celle de LK (la logique classique), le seul cas préoccupant est celui des règles  $\neg kd$  et  $\neg kg$ ; il faut montrer que:

a) l'on peut faire baisser le degré de la formule de coupure dans le cas où cette formule est de type  $\neg k[A_1, \dots, A_p]$ ,

b) l'on peut faire baisser le rang de la coupure dans le cas où la dernière règle employée est  $\neg kd$  ou  $\neg kg$ ; ces deux règles étant parfaitement symétriques, il suffira de le montrer pour l'une d'entre elles.

$$\begin{array}{c}
 a) \quad \frac{\Gamma, K \vdash \Delta \quad \Gamma_1, A_i, \neg A_i \vdash \Delta_{1_i} \quad \Gamma_2 \vdash A_i, \neg A_i, \Delta_{2_i}}{\Gamma, \Gamma_{1_i}, \Gamma_{2_i} \vdash \neg K, \Delta, \Delta_{1_i}, \Delta_{2_i}} \neg kd \\
 \dots \\
 \frac{\Gamma' \vdash K, \Delta' \quad \Gamma_3, A_i, \neg A_i \vdash \Delta_{3_i} \quad \Gamma_4 \vdash A_i, \neg A_i, \Delta_{4_i}}{\Gamma', \Gamma_{3_i}, \Gamma_{4_i}, \neg K \vdash \Delta', \Delta_{3_i}, \Delta_{4_i}} \neg kg \\
 \dots \dots \dots c \\
 \Gamma, \Gamma_{1_i}, \Gamma_{2_i}, \Gamma', \Gamma_{3_i}, \Gamma_{4_i} \vdash \Delta, \Delta_{1_i}, \Delta_{2_i}, \Delta', \Delta_{3_i}, \Delta_{4_i}
 \end{array}$$

$$\frac{\Gamma' \vdash K, \Delta' \quad \Gamma, K \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{ c}$$

$$\text{donne: } \frac{}{\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma', \Gamma_3, \Gamma_4 \vdash \Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta', \Delta_3, \Delta_4} \text{ ad + ag}$$

$$(1 \leq i \leq p)$$

$$K = k[A_1, \dots, A_p]$$

$$\text{b) } \frac{\begin{array}{c} \backslash \alpha_1 / \\ \Gamma', [C], K \vdash \Delta' \end{array} \quad \begin{array}{c} \backslash \alpha_2 / \\ \Gamma_1, [C] \vdash A_i, \neg A_i, \Delta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \backslash \alpha_3 / \\ \Gamma_2, [C], A_i, \neg A_i \vdash \Delta_2 \end{array}}{\Gamma', \Gamma_1, \Gamma_2, C \vdash \neg K, \Delta', \Delta_1, \Delta_2} \neg \text{kd} \quad (\text{b.1})$$

$$\frac{\begin{array}{c} \backslash \alpha / \\ \Gamma \vdash C, \Delta \end{array}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \neg K, \Delta, \Delta', \Delta_1, \Delta_2} \text{ c} \quad (\text{b.1})$$

$$K = k[A_1, \dots, A_p] \quad (1 \leq i \leq p)$$

donne:

$$\begin{array}{l} \neg \text{kd}(\text{coup}(\alpha, \alpha_j), \alpha_h, \alpha_m) \\ \text{ou } \neg \text{kd}(\text{coup}(\alpha, \alpha_j), \text{coup}(\alpha, \alpha_h), \alpha_m) \\ \text{ou } \neg \text{kd}(\text{coup}(\alpha, \alpha_j), \text{coup}(\alpha, \alpha_h), \text{coup}(\alpha, \alpha_m)) \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \leq j, h, m \leq 3 \\ h \neq m, j \neq m, h \neq j \end{array}$$

suivant que C apparaisse ou non dans  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

### Corollaires de l'élimination des coupures

► La notion de para-sous-formule d'une formule A est définie de la façon suivante:  $\text{PSF}(A) = \text{SF}(A) \cup \{\neg B; B \in \text{SF}(A) \text{ et } B \neq A\}$ .

► Etant donné que  $S_\star$  admet l'élimination des coupures et vu la configuration des règles de  $S_\star$ , il est clair que  $S_\star$  a la propriété de la para-sous-formule, c'est-à-dire que s'il existe une démonstration de  $\Gamma \vdash \Delta$  il existe

une démonstration de  $\Gamma \vdash \Delta$  dans laquelle les séquents ne sont faits que de para-sous-formules de formules de  $\Gamma$  et de  $\Delta$ .

► On en déduit que  $S_*$  est décidable.

5. Définition d'une négation classique  $\neg^*$ :

► On montre facilement que:

$$\frac{A \vdash}{\vdash (\neg(A \wedge \neg A) \wedge \neg A) \vee \neg(A \vee \neg A)}$$

et

$$\frac{\vdash A}{(\neg(A \vee \neg A) \vee \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A) \vdash}$$

ainsi pour le second:

$$\frac{\frac{\vdash A}{\vdash A \vee \neg A} \text{ ad} + \vee d \quad \frac{\vdash A \quad \neg A \vdash \neg A}{\neg A \vdash A \wedge \neg A} \wedge d}{\neg(A \vee \neg A) \vdash} \neg tg \quad \frac{\neg(A \wedge \neg A), \neg A \vdash}{\neg(A \wedge \neg A), \neg A \vdash} \neg cg}{(\neg(A \vee \neg A) \vee \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A) \vdash} \vee g + \wedge g$$

► Si on montre maintenant que:

$$\begin{aligned} \neg^* A &: A \rightarrow \neg(A \vee \neg A) \\ \text{eq } &(\neg(A \vee \neg A) \vee \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A) \\ \text{eq } &(\neg(A \wedge \neg A) \wedge \neg A) \vee \neg(A \vee \neg A), \end{aligned}$$

on aura:  $\frac{A \vdash}{\vdash \neg^* A} \neg^* d \quad \frac{\vdash A}{\neg^* A \vdash} \neg^* g$

a)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg A \vdash \neg A \quad \neg(A \wedge \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A)}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)} \wedge d \\
 \frac{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A) \quad \neg A, \neg(A \wedge \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A) \wedge \neg A}{\neg(A \vee \neg A) \vee \neg A, \neg(A \wedge \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A) \wedge \neg A, \neg(A \vee \neg A)} \vee g \\
 \frac{\neg(A \vee \neg A) \vee \neg A, \neg(A \wedge \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A) \wedge \neg A, \neg(A \vee \neg A)}{(\neg(A \vee \neg A) \vee \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A) \vdash (\neg(A \wedge \neg A) \wedge \neg A) \vee \neg(A \vee \neg A)} \wedge g + \vee d
 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \vdash A \quad \neg A \vdash \neg A}{\neg A, A \vdash A \wedge \neg A} \wedge d \\
 \frac{\neg A, A \vdash A \wedge \neg A}{\neg(A \wedge \neg A) \wedge \neg A, A \vdash \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)} \neg cg + \wedge g \\
 \frac{\neg(A \wedge \neg A) \wedge \neg A, A \vdash \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)}{(\neg(A \wedge \neg A) \wedge \neg A) \vee \neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)} \vee g \\
 \frac{(\neg(A \wedge \neg A) \wedge \neg A) \vee \neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)}{(\neg(A \wedge \neg A) \wedge \neg A) \vee \neg(A \vee \neg A) \vdash A \rightarrow \neg(A \vee \neg A)} \rightarrow d
 \end{array}$$

c1)

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \vdash A \quad \neg A \vdash \neg A}{A \vee \neg A \vdash A, \neg A} \vee g \\
 \frac{A \vee \neg A \vdash A, \neg A}{\vdash A, \neg A, \neg(A \vee \neg A)} \neg td \\
 \frac{\vdash A, \neg A, \neg(A \vee \neg A) \quad \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)}{A \rightarrow \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A, \neg(A \vee \neg A)} \rightarrow g \\
 \frac{A \rightarrow \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A, \neg(A \vee \neg A)}{A \rightarrow \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \vee \neg(A \vee \neg A)} \vee d
 \end{array}$$

c2)

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \vdash A}{A \wedge \neg A \vdash A} ag + \wedge g \\
 \frac{A \wedge \neg A \vdash A}{\vdash A, \neg(A \wedge \neg A)} \neg cd \quad \frac{\quad}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A)} \text{cf 3 a) 11)} \\
 \frac{\vdash A, \neg(A \wedge \neg A) \quad \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A)}{A \rightarrow \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A)} \rightarrow g
 \end{array}$$

c1 + c2 donne  $A \rightarrow \neg(A \vee \neg A) \vdash (\neg(A \vee \neg A) \vee \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A)$ .

► Soit  $S_{\star}'$  le système obtenu à partir de  $S_{\star}$  en remplaçant les règles  $\neg td$ ,  $\neg cg$ , par  $\neg^*g$ ,  $\neg^*d$ , les règles  $\neg td$ ,  $\neg cg$  sont alors des règles dérivées de  $S_{\star}'$  ; ainsi  $S_{\star}'$  est équivalent à  $S_{\star}$ .

6. La hiérarchie  $S_{\star_n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

► Soient  $A^{\square} : A \wedge \neg A$  et  $A_{\blacksquare} : A \vee \neg A$ , on définit  $A^n$  et  $A_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) de la façon suivante:

$$\begin{array}{ll} A^0 = A & A_0 = A \\ A^1 = A^{\square} & A_1 = A_{\blacksquare} \\ A^{n+1} = (A^n)^{\square} & A_{n+1} = (A_n)_{\blacksquare} . \end{array}$$

►  $S_{\star_n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) est pour chaque  $n$  le calcul des séquents comportant les mêmes règles positives que  $S_{\star}$  et dont les règles pour la négation sont les suivantes:

$$\begin{array}{ll} \frac{\Gamma, A_n \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A_n, \Delta} \neg tnd & \frac{\Gamma \vdash A_n, \Delta}{\Gamma, \neg A_n \vdash \Delta} \neg tng \\ \frac{\Gamma, A^n \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A_n, \Delta} \neg cnd & \frac{\Gamma \vdash A^n, \Delta}{\Gamma, \neg A^n \vdash \Delta} \neg cng \\ \frac{\Gamma, k[A_1, \dots, A_p] \vdash \Delta \quad \Gamma_{1_i} \vdash A_{i_{n-1}}, \neg A_{i_{n-1}}, \Delta_{1_i} \quad \Gamma_{2_i}, A_i^{n-1}, \neg A_i^{n-1} \vdash \Delta_{2_i}}{\Gamma, \Gamma_{1_i}, \Gamma_{2_i} \vdash \neg k[A_1, \dots, A_p], \Delta, \Delta_{1_i}, \Delta_{2_i}} \neg knd \\ \frac{\Gamma \vdash k[A_1, \dots, A_p], \Delta \quad \Gamma_{1_i} \vdash A_{i_{n-1}}, \neg A_{i_{n-1}}, \Delta_{1_i} \quad \Gamma_{2_i}, A_i^{n-1}, \neg A_i^{n-1} \vdash \Delta_{2_i}}{\Gamma, \Gamma_{1_i}, \Gamma_{2_i}, \neg k[A_1, \dots, A_p] \vdash \Delta, \Delta_{1_i}, \Delta_{2_i}} \neg kng \end{array}$$

$(1 \leq i \leq p)$

► Si  $n = 0$ ,  $\neg tnd = \neg cnd$  et  $\neg tng = \neg cng$  et ce sont les règles de la négation pour le calcul des séquents classiques ;  $\neg knd$  et  $\neg kng$  ne sont alors pas définies, on considérera donc que  $S_{\pi_0}$  est le calcul des séquents classique.

► On voit que  $S_{\pi_1} = S_{\pi}$ .

► On appelle  $S_{\pi}$  le calcul  $S_{\pi}$  sans les règles pour la négation,  $S_{\pi_{\omega}}$  est donc un calcul des séquents pour la logique positive classique.

► Il est clair que  $S_{\pi_n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ainsi que  $S_{\pi_{\omega}}$  admettent l'élimination des coupures.

► Dans chaque calcul  $S_{\pi}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) on a une négation  $\neg^n$  qui a un comportement séquentiellement classique:  $\neg^n A: A \rightarrow \neg A_n$ .

## 7. $S_{\rho}$ et la hiérarchie $S_{\rho_n}$

►  $S_{\rho}$  est le calcul des séquents obtenu à partir de  $S_{\pi}$  en remplaçant les règles  $\neg kd$  et  $\neg kg$  par les règles  $\neg kd'$  et  $\neg kg'$  suivantes:

$$\frac{\Gamma, k[A_1, \dots, A_n] \vdash \Delta \quad \Gamma_i \vdash A_i, \neg A_i, \Delta_i}{\Gamma, \Gamma_i \vdash \neg k[A_1, \dots, A_p], \Delta, \Delta_i} \neg kd'$$

$$\frac{\Gamma \vdash k[A_1, \dots, A_p], \Delta \quad \Gamma_i, A_i, \neg A_i \vdash \Delta_i}{\Gamma, \Gamma_i, \neg k[A_1, \dots, A_p] \vdash \Delta, \Delta_i} \neg kg'$$

►  $\neg^*$  est bien-sûr toujours définissable dans  $S_{\rho}$  de la même manière que dans  $S_{\pi}$  et a également un comportement séquentiellement classique ; on vérifie sans peine en employant une méthode analogue que  $S_{\rho}$  permet l'élimination des coupures ; enfin il est clair que  $S_{\rho}$  est strictement plus fort que  $S_{\pi}$ .

► La présentation axiomatique  $\rho$  est obtenue à partir de  $\pi$  en remplaçant 14) par:

- 15)  $(A_1^\circ \wedge \dots \wedge A_p^\circ) \rightarrow (k[A_1, \dots, A_p])^\circ$       $[A^\circ : \neg(A \wedge \neg A)]$   
 16)  $(A_1 \cdot \wedge \dots \wedge A_p \cdot) \rightarrow (k[A_1, \dots, A_p]) \cdot$       $[A \cdot : A \vee \neg A]$

► La hiérarchie  $S_\rho$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) est obtenue selon une méthode comparable à celle utilisée pour  $S_{\pi_n}^n$  et on a  $S_\rho = S_{\pi_\omega}$ .

### 8. Perspectives

Les méthodes que nous avons utilisées peuvent être déployées suivant deux axes: un axe horizontal qui concerne une adaptation (relativement directe et évidente) au calcul des prédicats du premier ordre et d'ordres supérieurs, ainsi qu'aux diverses extensions conservatrices de la logique classique (logiques modale, épistémique, temporelle, etc...); un axe vertical qui est la continuation du chemin conduisant de la logique paraconsistante à la logique non-aléthique, la question étant de savoir qu'elle serait la logique  $\mu$  la plus faible remplissant les deux conditions suivantes: que la logique classique soit traductible dans  $\mu$ , que le théorème de l'élimination des coupures soit valable pour  $\mu$ .

Universités de Paris 1 (Panthéon-Sorbonne) et Paris 7 (Jussieu)

### REFERENCES

- [1] Béziau, J.Y., 'C<sub>1</sub> et C<sub>i</sub>', à paraître.  
 [2] da Costa, N.C.A., 'On the theory of inconsistent formal systems' *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol XV, n°4 (1974), pp.497-510.  
 [3] Gentzen, G., *Recherches sur la déduction logique*, PUF, Paris, 1955, traduction commentée par R.Feys et J.Ladrière de 'Untersuchungen über das logische Schliessen', *Mathematische Zeitschrift*, T39 (1934), pp.176-210/pp.405-431.  
 [4] Loparic, A. et N.C.A. da Costa, 'Paraconsistency, paracompleteness, and valuations', *Logique et Analyse*, n° 106 (1984), pp.119-131.  
 [5] Raggio, R., 'Propositional sequence-calculi for inconsistent systems', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol IX, n°4 (1968), pp.359/366.