La Critique Schopenhaurienne de l'Usage de la Logique en Mathématiques

A nos yeux, la méthode d'Euclide n'est qu'une brillante absurdité. ([7] p. 108)

Jean-Yves Béziau[1]

Une contradiction insoluble

En 1907 Henri Poincaré évoquait en ces termes l'ambiguïté du statut de la mathématique : « La possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble. Si cette science n'est déductive qu'en apparence, d'où lui vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute ? Si au contraire, toutes les propositions qu'elle énonce peuvent se tirer les unes des autres par les règles de la logique formelle comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie ? » ([5] pp. 9-10).

A cette époque ce dilemme n'était pas nouveau, cependant il resurgissait suite à la prétention de la logistique à vouloir ramener la mathématique en son sein. Quels arguments pouvaient employer les adversaires de cette thèse ? On retombait sur ce problème classique : quelle serait une certitude mathématique autre qu'une certitude fondée sur la logique ?; et un homme comme Poincaré qui n'était prêt à faire des mathématiques ni une science empirique ni un avatar de la logique recourait à Kant qu'il aménageait à sa guise proposant de considérer l'axiome d'induction complète comme une proposition synthétique *a priori*.

Depuis cette époque la logique a bien évolué. Ses prétentions à vouloir s'approprier les mathématiques semblent avoir été abandonnées et elle s'est

1 Université de Paris 1 Panthéon-Sorbonne — Département de Philosophie — Université de Paris 7 Jussieu — Département de mathématiques. Ce travail a pu être effectué alors que l'auteur séjournait à l'Université de São Paulo grâce à une bourse Lavoisier du Ministère des Affaires Etrangères du Gouvernement Français.

tournée vers des horizons plus modestes, plus techniques et plus pratiques. La contradiction insoluble dont nous parle Poincaré n'a nullement été résolue et si le débat a cessé, c'est faute de combattant. Les mathématiciens ne se sentant plus agressés par la logique n'ont pas cherché à justifier ou à fonder outre mesure leur science, considérant que la question des fondements est un débat méthaphysique vain et inutile propre au gaspillage de temps, substance précieuse qu'il vaut mieux utiliser au travail mathématique proprement dit, à savoir la démonstration de théorèmes.

Pour le philosophe cependant la question reste posée et cette contradiction insoluble dont nous parle Poincaré est toujours un problème incontournable. Nous nous proposons ici de montrer comment l'on peut esquisser une réponse en partant de la pensée de Schopenhauer. Il est intéressant de se rapporter à ce penseur afin d'élucider ce problème pour plusieurs raisons : Schopenhauer reprend et développe la thèse kantienne des mathématiques qui semble la seule à pouvoir résoudre cette énigme, il propose une analyse de la méthode euclidienne qui a été confirmée par les travaux d'éruditions les plus récents, enfin sa pensée permet d'avoir un nouveau regard sur la théorie des ensembles comme fondement des mathématiques.

Evidence, intuition et démonstration

Pour Schopenhauer « l'évidence immédiate est toujours préférable à la vérité démontrée » ([7] p. 105). L'évidence immédiate est une vérité indémontrée sur laquelle toute preuve s'appuie directement (dans ce cas la preuve s'abreuve directement à la source) ou indirectement (dans ce cas la vérité résultante est comme une eau amenée par l'aqueduc de l'enchaînement syllogistique).

Le fondement de l'évidence est l'intuition : « l'intuition est la source première de toute évidence » ([7] p. 106).

Par conséquent là où l'intuition est possible un jugement reposant directement sur elle est bien meilleur qu'un jugement obtenu par la voie logique.

L'erreur d'Euclide

Euclide a engagé les mathématiques sur la mauvaise voie en préférant la méthode logique à la méthode intuitive, engageant également avec elle les autres sciences à sa suite en faisant des mathématiques « le modèle de toute exposition scientifique » ([7] p. 108).

Les « axiomes seuls reposent sur l'évidence immédiate; toutes les vérités géométriques suivantes sont prouvées logiquement » ([7] p. 112). Les théorèmes sont ainsi tirés des axiomes par des « tours d'escamotages » ([7] p. 107) dignes des plus habiles prestidigitateurs laissant le lecteur ébahi mais ignorant :

> celui-ci, tout saisi, est obligé d'admettre une chose dont la contexture intime lui est encore parfaitement incomprise, et cela à tel point qu'il pourra étudier Euclide en entier sans avoir une compréhension effective des relations de l'espace ([7] p. 107).

Cette méthode absurde canonisée par Euclide pourrait « être une cause de l'antipathie que certains esprits, d'ailleurs excellents, ressentent pour les mathématiques » ([6] p. 143).

Comment donc Euclide a-t-il pu ainsi se fourvoyer ? L'explication est à chercher dans la philosophie des Eléates et leurs successeurs. S'étant aperçu que les apparences (*phainómenon*) sont parfois trompeuses

> on reconnut qu'il ne fallait pas se fier absolument à l'intuition, et l'ont conclut précipitamment que la vérité ne se fonde que sur la pensée rationnelle pure et logique, [...] alors le rationalisme s'établit sur les ruines de l'empirisme, et c'est conformément à ses principes qu'Euclide assit les mathématiques, non sur l'évidence intuitive (*phainómenon*) réservée, et nécessairement, aux seuls axiomes, mais sur le raisonnement (*jooumenon*) ([7] p. 108).

Arpád Szabó dans les années soixante à la suite de travaux détaillés sur les mathématiques grecques en arrivait à une conclusion similaire :

> Je rapporte donc à l'influence de la philosophie éléate tant le refus de l'empirisme et de l'évidence sensible dans les mathématiques grecques que la méthode de la démonstration indirecte, ([8] p. 239)

en croyant découvrir une vérité nouvelle :

> On n'a pas songé, jusqu'à présent, que tant la création des mathématiques systématico-déductives que l'établissement d'un corps de définitions et d'axiomes servant à cette science, dussent être mis au compte de l'influence éléate. ([8] p. 17).

La raison pour laquelle cependant aujourd'hui encore Euclide est considéré comme un Dieu plutôt que comme un imbécile est que l'on pense généralement que la fameuse méthode axiomatico-déductive d'Euclide a permis de transformer la cuisine mathématique préexistante en Science non seulement en rejetant les démonstrations se fondant sur des images sensibles mais également en substituant à ces images grossières des images idéales :

> En s'efforçant de débarrasser leurs démonstrations de ce qui est purement concret et visible, les mathématiques grecques étaient aussi amenées chez

> Euclide à placer leur objet entièrement et exclusivement dans le domaine de la pensée pure. ([8] p. 210).

On pense qu'Euclide raisonnait sur des triangles abstraits semblables aux Idées platoniciennes. C'est ce que conteste de manière détournée Schopenhauer en considérant que Euclide s'est rabattu sur la logique seule en faisant du principe du raisonnement indirect son outil favori.

Il n'est pas question pour nous de nous étendre ici sur cette question mais nous pouvons remarquer que le platonisme mathématique dont on veut faire de Euclide le père (mais Euclide bien qu'étant grec n'était pas Platon) procède d'une confusion généralisée. D'une part Platon lui-même a insisté sur le fait que les objets de la géométrie n'étaient pas des Idées et aucun mathématicien soi-disant platonicien n'a développé une philosophie donnant un réel statut à ces prétendus objets abstraites existant dans un ciel métaphorique, qui pour employer un terme cher à Schopenhauer n'est qu'une cité de coucous dans les nuages (*nephelokokkugía*).

Si on écarte ce platonisme mou et flou, tant que l'intuition est considérée comme sensible et donc trompeuse la mathématique doit se tourner vers la logique pour assurer sa certitude.

La révolution kantienne : l'intuition pure

Il a fallu attendre Kant pour que cette condamnation systématique de l'intuition prenne fin :

> pour la première fois — après avoir appris de ce grand esprit que les intuitions d'espace et de temps diffèrent absolument des intuitions empiriques, ne dépendent en rien des impressions de la sensibilité qu'elles les conditionnent au contraire et ne sont point conditionnées par elles, c'est-à-dire qu'elles sont *a priori* et par conséquent à l'abri des illusions sensibles — alors nous pouvons nous convaincre que la méthode d'Euclide est une précaution inutile, une béquille pour une jambe qui se porte bien ([7] p. 109).

Lorsque Kant dit que « 7 + 5 = 12 » est une proposition synthétique *a priori* Schopenhauer applaudit donc, mais il ne se contente pas d'admirer Kant et de commenter ses dires, il va plus loin.

Le principe de raison suffisante

Le fondement de toute représentation consiste, pour Schopenhauer, dans le principe de raison suffisante qui s'énonce ainsi : *nihil est sine ratione* (rien n'est sans raison). Mais si ce principe est bien la condition absolue de toute représentation possible il faut cependant en distinguer quatre formes auxquelles correspondent des classes de représentations (côté sujet) et des facultés (côté objet) distinctes.

Ainsi l'erreur fondamentale consiste à faire une confusion dans l'usage de ces formes particulières du principe de raison suffisante, confusion fréquente avant lui car l'on n'avait même pas distingué théoriquement ces différentes formes, ainsi Aristote emploie arbitrairement le même terme, *aítion*, pour désigner des raisons aussi différentes que, par exemple, les prémisses d'un raisonnement et la cause matérielle. L'erreur d'Euclide consiste elle aussi dans le fait d'utiliser une des formes du principe à la place d'une autre.

La classe de représentations dont s'occupe les mathématiques est donc régie par une forme spécifique du principe de raison différente de celle dont on use pour raisonner purement logiquement, c'ést-à-dire pour passer d'un jugement à un autre directement.

En mathématiques on peut, soit fonder directement chaque théorème à partir de l'intuition, soit déduire ces théorèmes des axiomes grâce aux principes logiques. Les résultats obtenus seront les mêmes, mais celui qui emploie la seconde méthode est pour le moins ridicule :

> il ressemble à un voyageur de nuit qui prendrait pour une rivière un beau chemin bien sûr et bien clair, et qui, s'en écartant avec soin, continuerait sa route sur un sol pierreux, enchanté de rencontrer de temps en temps la prétendue rivière ([7] p. 109).

Il méconnaît l'essence de la mathématique et encourt le risque de s'égarer. Il n'a pas compris que la certitude logique n'est pas plus certaine que la certitude mathématique et que chaque forme du principe de raison est pourvue d'un caractère de nécessité, certes différent, mais n'ayant aucune supériorité sur les autres. Ainsi l'évidence et l'autorité de la forme du principe de raison propre au domaine de l'intuition pure

> sont tout aussi grandes et tout aussi immédiates que celles du principe de raison suffisante de la connaissance, c'est-à-dire de la certitude logique ([7] p. 109).

Celui qui suit la voie logique en mathématiques n'aura donc pas une certitude plus grande et aura l'inconvénient de n'avoir toujours que « la conviction (*convictio*) mais non l'intelligence (*cognitio*) » ([6] p. 140).

Il est à remarquer que même si le risque d'erreur est plus important lorsque l'on utilise la méthode logique en mathématiques dans l'absolu les résultats obtenus sont identiques, cela s'explique par le fait que malgré la diversité il y a unité et que le principe de raison a une origine unique :

> je m'efforce précisément dans cette dissertation, d'établir que le principe de raison suffisante est un jugement qui a une raison quadruple, nullement

> donc quatre raisons diverses conduisant par le fait du hasard à un même jugement, mais une seule raison se présentant sous quatre formes et que j'appelle par figure, quadruple racine ([6] p. 114).

Cela constitue déjà une première différence entre la théorie de Schopenhauer et l'intuitionnisme moderne de Brouwer dont il a été parfois dit que Schopenhauer était un précurseur. La deuxième différence qui est beaucoup plus importante consiste dans la conception même de l'intuition originaire de la mathématique.

Principium rationis sufficientis essendi

Mais quelle est donc cette loi qui sert de fondement aux mathématiques ? Pour bien la comprendre il faut d'abord spécifier quelle est la nature intime du domaine de représentation qu'elle régit, à savoir l'espace et le temps; pour Schopenhauer ils

> sont constitués de telle sorte que toutes leurs parties sont en rapport les unes avec les autres et, à cet égard chacune d'elles est déterminée et conditionné par une autre, dans l'espace ce rapport est appelé *situation*, dans le temps, *succession* » ([6] p. 136),

la forme du principe de raison suffisante dont il est question ici et que Schopenhauer baptise *principium rationis sufficientis essendi* (principe de raison suffisante de l'être) est donc « cette loi, d'après laquelle les parties de l'espace et du temps se déterminent mutuellement en vue de ces rapports » ([6] p. 136).

Cette forme du principe de raison se dédouble encore en deux, selon qu'il s'agisse de l'espace, champ de la géométrie, ou du temps, champ de l'arithmétique.

En ce qui concerne la géométrie, Schopenhauer nous donne deux exemples de démonstrations qui sont, d'après lui, directement fondées sur le principe de raison d'être dans l'espace. Il s'agit de la sixième et de la seizième propositions du premier livre d'Euclide et Schopenhauer exhibe également les propres preuves d'Euclide pour bien faire voir la différence entre l'obscure méthode euclidienne et la sienne, limpide (*cf.* [6] pp. 140-143). Ces exemples lui valurent l'estimation de Goethe qui le considéra alors comme un grand espoir pour la philosophie (ces considérations se trouvent dans la thèse de doctorat de Schopenhauer qu'il écrivit à l'âge de 25 ans).

En ce que concerne la raison d'être dans le temps, elle consiste dans la lois de succession qui veut que chaque moment ait pour condition le précédent (*cf.* [6] pp. 137-138).

Tout cela peut sembler un fatras de conceptions fort vieilles et mal adaptées aux mathématiques modernes.

Cependant Wittgenstein, qui dans certains pays est considéré comme le plus grand philosophe du XXème siècle, s'est directement inspiré de la pensée de Schopenhauer, ainsi Robert J. Fogelin a-t-il pu écrire à ce propos « many of Wittgenstein's central thoughts on mathematics were derived from this source » ([3] p. 198); les sources auxquelles il fait référence sont les remarques de Schopenhauer sur le théorème de Pythagore ([6] p. 144, [7] p. 110).

Nous allons maintenant tenter de montrer qu'aujourd'hui on peut penser que le principe de raison d'être a une expression nouvelle qui se rapproche beaucoup de cette loi de succession et que la thèse de Schopenhauer sur un fondement distinct des mathématiques et de la logique peut toujours être soutenue.

Le principe d'itération : une nouvelle formulation du principe de raison suffisante de l'être ?

A la fin du siècle passé diverses tentatives ont été faites pour tenter de réduire les mathématiques à la logique. Finalement c'est la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (ZF) qui a emporté la bataille dans le champ des fondements des mathématiques. De ce point de vue les mathématiques n'ont pas été ramenées à une théorie purement logique.

On peut considérer que vu son caractère fondateur ZF a un rapport étroit avec l'essence des mathématiques. Or l'idée intuitive de ZF repose essentiellement sur le concept itératif d'ensemble. Ce concept itératif d'ensemble repose lui-même sur un principe d'itération qui apparaît comme une généralisation de la loi de succession.

Si ce principe d'itération est considéré comme le principe de raison suffisante de l'être on peut remarquer qu'il se différencie au moins de deux façons de la logique.

Tout d'abord il est indépendant de la logique au sens où l'on peut développer une théorie des ensembles reposant sur ce principe à l'aide d'une autre logique (par exemple une logique paraconsistante, *cf.* [2] p. 13).

Ensuite ce principe d'itération en tant qu'il est constitutif du modèle standard de ZF ne peut être ramené à la logique au sens suivant : il n'existe pas un ensemble récursif d'axiomes et de règles finitaires dont l'unique modèle, à isomorphisme près, soit ce modèle standard (c'est une conséquence du premier théorème d'incomplétude de Godel).

Si on considère que le principe d'itération est le principe de raison suffisante de l'être on comprend pourquoi il ne doit pas y avoir d'Urelements dans la théorie des ensembles, qu'elle doit restée pure justement parce qu'elle exprime l'essence de l'intuition pure *a priori*.

Il est également intéressant de ce point de vue là de reconsidérer le principe d'abstraction : la trivialité de la théorie des ensembles de Frege semble prouver qu'il n'est pas possible de fonder les mathématiques à partir du principe de raison de la connaissance.

Bibliographie

[1] Boolos, G., « The iterative conception of set » *in* : *Philosophy of Mathematics* (second edition), CUP, Cambridge,1983, pp. 486-502.

[2] da Costa, N. C. A., « Matemática e Paraconsistência », *Monografias da Sociedade Paranaense de Matemática*, n° 7, 1989.

[3] Fogelin, F. J., *Wittgenstein*, RKP, London, 1976.

[4] Parsons, C., « What is the iterative conception of set ? » *in* : *Philosophy of Mathematics* (second edition), CUP, Cambridge, 1983, pp. 503-529.

[5] Poincaré, H., « Sur la nature du raisonnement mathématique » *in* : *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris, 1907.

[6] Schopenhauer, A., *De la quadruple racine du principe de raison suffisante*, Vrin, Paris, 1946; traduction par J. Gibelin de « Ueber die vierfache Wurzel des Satzes von Zureichenden Grunde », *in* : *Commission der Hof-Buch-und Kunsthandlung*, Rudolstadt, 1813; Herrmann, Francfort-sur-le-Main, 1847.

[7] Schopenhauer, A., *Le monde comme volonté et comme représentation*, PUF, Paris, 1966; traduction par A. Burdeau et R. Roos de *Die Welt als Wille und Vorstellung*, Brockhaus, Leipzig, 1819, 1844, 1859.

[8] Szabó, A., *Les débuts des mathématiques grecques*, Vrin, Paris, 1977; traduction par M. Federspiel de *Anfänge der griechischen Mathematik*, Akademiai Kiádo, Budapest, 1969.